

# Βάσεις Gröbner

6 Σεπτεμβρίου 2017

1. (2 μονάδες) Έστω  $I$  ιδεώδες του δακτυλίου  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  εφοδιασμένου με μια μονωνυμική διάταξη. Πότε μια βάση Gröbner για το ιδεώδες  $I$  λέγεται ελαχιστική και πότε ανάγωγη; Αποδείξτε ότι δύο ελαχιστικές βάσεις Gröbner για το ιδεώδες  $I$  έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Δώστε παράδειγμα ιδεώδους με δύο διαφορετικές ελαχιστικές βάσεις Gröbner και ως προς την ίδια μονωνυμική διάταξη.

→ 2. (2 μονάδες) Να υπολογίσετε μια βάση και την διάσταση του  $K$ -διανυσματικού χώρου  $K[x, y]/I$ , όπου  $I$  είναι το ιδεώδες

$$\langle x^2y + xy^2 + 1, x^3 - 1 \rangle.$$

3. (2 μονάδες) Έστω  $G$  μια βάση Gröbner για το ιδεώδες  $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  ως προς κάποια μονωνυμική διάταξη. Έστω  $f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  και  $r \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  είναι ανάγωγο μόδιο  $G$ . Δείξτε ότι αν  $f - r \in I$  τότε  $f \xrightarrow{G} r$ .

4. (2 μονάδες) Βρείτε μία ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες

$$I = \langle xy^n - 2z \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

του δακτυλίου  $\mathbb{R}[x, y, z]$ , ως προς κάποια μονωνυμική διάταξη.

→ 5. (2 μονάδες) Έστω  $f = x^5y^5z^5 + 7x^4z^8 - 11x^3y^5z^6 + 73x^6y^{12}z^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ . Δείξτε ότι δεν υπάρχει μονωνυμική διάταξη του  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  τέτοια ώστε  $lt(f) = x^5y^5z^5$ .

Καλή επιτυχία